ELFT
31.
HATVANI ISTVÁN
FIZIKAVERSENY
2013/2014.
HAJDÚ-BIHAR-MEGYE

A 4. forduló feladatainak megoldása

4.1. feladat

A - személygépkocsi B - teherautó

$v_A = 126\ \frac{km}{h} = 35\ \frac{m}{s}$ $v_B = 90\ \frac{km}{h} = 25\ \frac{m}{s}$ $d = 3\ km = 3.10^3\ m$

a) $t_1 = 0{,}5\ min = 30\ s$ $\underline{\underline{d_1 = ? = 1{,}2\ km}}$

t_1 idő alatt a járművek

$$s_A = v_A t_1 \quad \text{és} \quad s_B = v_B t_1$$

utat tesznek meg egymás felé, vagyis a közöttük levő eredeti távolság $s_A + s_B$ értékkel csökken:

$$d_1 = d - (v_A t_1 + v_B t_1) = d - (v_A + v_B)t_1 \ .$$

Az ismert mennyiségekkel

$$d_1 = 3.10^3\ m - (35\ \frac{m}{s} + 25\ \frac{m}{s}).30\ s = 1{,}2.10^3\ m.$$

<u>Tehát a gépkocsik közötti távolság 1,2 km-re csökken.</u>

b) $\underline{\underline{t_2 = ? = 50\ s}}$ A két jármű akkor halad el egymás mellett, ha az áltáluk megtett utak összege éppen d:

$$d = v_A t_2 + v_B t_2 \ .$$

Ebből:

$$t_2 = \frac{d}{v_A + v_B} \ .$$

a megadott mennyiségekkel:

$$t_2 = \frac{3.10^3\ m}{35\ \frac{m}{s} + 25\ \frac{m}{s}} = 50\ s \ .$$

<u>Tehát 50 másodperc elteltével haladnak el egymás mellett a gépkocsik.</u>

c) $d' = 4{,}2\ km = 4{,}2.10^3\ m$ $\underline{\underline{t_3 = ? = 2\ min}}$

A b) résznél számított t_2 időn túl még $t_3 - t_2$ ideig kell mozogniuk. Így

$$d_3 = v_A(t_3 - t_2) + v_B(t_3 - t_2) = (v_A + v_B)(t_3 - t_2).$$

Ebből a keresett idő-érték:

$$t_3 - t_2 = \frac{d_3}{v_A + v_B} \longrightarrow t_3 = \frac{d_3}{v_A + v_B} + t_2 \ .$$

Behelyettesítéssel:

$$t_3 = \frac{4,2.10^3\ m}{35\ \frac{m}{s} + 25\ \frac{m}{s}} + 50\ s = 120\ s\ (= 2\ min)\ .$$

Tehát 2 perc elteltével lesznek egymástól 4,2 km-re a gépkocsik.

4.2.A) feladat

$A = 75\ dm^2 = 0,75\ m^2$ $\Delta p = 40\ mPa = 4.10^{-2}\ Pa$ $\Sigma F = ? = 30\ mN$

Az ismert $p = \frac{F}{A}$ összefüggés alapján a szobában

$$p_1 = \frac{F_1}{A},$$

a környezetben

$$p_2 = \frac{F_2}{A}$$

a légnyomás. A légnyomások különbsége:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \frac{F_2 - F_1}{A}\ .$$

$F_2 - F_1$ pedig éppen a ΣF eredőerő. Ennek értéke:

$$\Sigma F = A.\Delta p\ .$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$F = 0,75\ m^2.4.10^{-2}\ \frac{N}{m^2} = 0,03\ N\ .$$

Tehát az ablakra ható eredőerő 30 mN nagyságú.

4.2.B) feladat

$t_1 = 15\ ^oC$ $l_1 = 20,5\ cm = 0,205\ m$ $t_2 = 42\ ^oC$ $\alpha = 1,68.10^{-5}\ \frac{1}{^oC}$

$l_2 = ? = 20,51\ cm$

A vonalmenti (lineáris) hőtágulásra érvényes

$$l = l_o(1 + \alpha\Delta t)$$

összefüggésben szereplő l_o a 0 ^oC hőmérsékleten mért hosszat jelenti, Δt pedig a 0 ^oC-tól számított hőmérsékletet (Δt ebben az esetben éppen t!). Mivel l_o értékét nem ismerjük, ezért az összefüggést két esetre kell felírni:

$$l_1 = l_o(1 + \alpha t_1) \quad \text{és} \quad l_2 = l_o(1 + \alpha t_2)\ .$$

Osztással az

$$l_2 = l_1 \cdot \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}$$

összefüggéshez jutunk. Az ismert mennyiségekkel:

$$l_2 = 0,205\ m \cdot \frac{1 + 1,68.10^{-5}\ \frac{1}{^oC} \cdot 42\ ^oC}{1 + 1,68.10^{-5}\ \frac{1}{^oC} \cdot 15\ ^oC} = 0,205093\ m\ .$$

A várakozással ellentétben egy nagyon pontos végeredményt írtunk fel az alábbiak miatt.

A vonalmenti hőtágulási együttható egyrészt nagyon kicsi, másrészt általában 0...100 °C hőmérséklet-tartományban állandó. Emiatt nem követünk el nagy hibát a számítások során, ha a 0 °C hőmérsékleten mért hosszúság helyett a kiindulási értéket tartalmazó

$$l_2 = l_1(1 + \alpha.\Delta t)$$

összefüggéssel számolunk. Esetünkben

$$l_2 = 0{,}205\ \mathrm{m}\cdot\left[1 + 1{,}68.10^{-5}\ \frac{1}{^\circ\mathrm{C}}(42\ ^\circ\mathrm{C} - 15\ ^\circ\mathrm{C})\right] = 0{,}205093\ \mathrm{m}.$$

Ez az eredmény pedig megegyezik a jó összefüggéssel számított értékkel!

Tehát a huzal hossza 20,51 cm lesz.

Megjegyzés! Nagyon nagy hiba lenne azonban, ha a folyadékok vagy a gázok hőtágulásánál is alkalmaznánk az egyszerűsítést!

4.3.A) feladat

$h = 20\ \mathrm{m}$ $t = 4\ \mathrm{s}$ $m = 60\ \mathrm{kg}$ $P = ?\ \mathrm{kW} = 3\ \mathrm{kW}$

Az m tömeget kell t idő alatt „felemelni" h magasságra. Az emelési munka mgh értéke miatt a teljesítmény

$$P = \frac{mgh}{t}$$

nagyságú. Az ismert mennyiségekkel:

$$P = \frac{60\ \mathrm{kg}.10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.20\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{s}} = 3.10^3\ \frac{\mathrm{kg.m}^2}{\mathrm{s}^3}\ (\mathrm{W}).$$

Tehát 3 kW teljesítményt kell kifejteni.

4.3.B) feladat

$t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ $\rho_1 = 8{,}92.10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ $T_2 = 500\ \mathrm{K} \longrightarrow t_2 = 226{,}8\ ^\circ\mathrm{C}$

$\alpha = 1{,}68.10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}\ (\frac{1}{^\circ\mathrm{C}})$ $\rho_2 = ? = 8{,}828.10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

A sűrűség kiszámítására alkalmas

$$\rho = \frac{m}{V}$$

összefüggést felírjuk két állapotra:

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} \quad \text{és} \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2}.$$

Ezek osztásával kapjuk a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

összefüggést. A térfogatok közötti **egyszerűbb** mennyiségegyenlet:

$$V_2 = V_1(1 + \beta.\Delta t) = V_1(1 + 3\alpha.\Delta t) .$$

Ezzel

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + 3\alpha(t_2 - t_1)}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$\rho_2 = \frac{8{,}92.10^3 \frac{kg}{m^3}}{1 + 3.1{,}68.10^{-5} \frac{1}{^oC}(226{,}8\ ^oC - 20\ ^oC)} = 8{,}828.10^3 \frac{kg}{m^3} .$$

<u>Tehát a magasabb hőmérsékleten a réz sűrűsége $8{,}828.10^3 \frac{kg}{m^3}$</u> .

4.4. feladat

Légüres térben a függőlegesen felfelé hajított test emelkedési ideje és a a tetőpontról szabadon eső test esési ideje megegyezik. Ezzel szemben a levegőben megvalósuló mozgás esetében a közegellenállás miatt az emelkedési idő rövidebb, az esési idő pedig hosszabb a légüres térben mérhető értékeknél.

4.5. feladat

a) A mérőeszköz **hőmérő**.

b) A hőmérő működésének alapja a **folyadékok hőtágulása**. Először alkoholt, majd higanyt alkalmaztak.

c) **Gabriel Daniel FAHRENHEIT** készítette el először a ma is elfogadott kivitelű, először etilalkohol majd higany folyadékot tartalmazó hőmérőt. Ő Danzig-ban (ma: Gdansk-ban) született 1686. május 14-én (!?) és Hágában halálozott el 1736. szeptember 16-án.

d) A mellékelt képen egy hőmérő két skálával ellátott formáját láthatjuk. **Nem tárgyi tévedés** az a megfigyelhető tény, hogy a két skálán egy esetben azonos számértékek felelnek meg egymásnak. Ugyanis a napjainkban ismert hőmérsékleti skálák (Reaumur, Fahrenheit, Celsius és Kelvin) közül csak a Celsius- és a Fahrenheit-skálán lehet azonos számértékű a hőmérséklet. Ezen két skálán mérhető hőmérsékletek átváltása:

$$t' = 1{,}8\,t + 32 .$$

(t' a Fahrenheit-fokban, t a Celsius-fokban mért hőmérsékletet jelenti.) Ha csak számértékekben gondolkodunk, akkor $t' = -40$ esetben

$$t = \frac{t' - 32}{1{,}8} \longrightarrow t = \frac{-40 - 32}{1{,}8} = -40 .$$

Vagyis egy test hőmérsélete lehet $-40\ ^oC$, vagy $-40\ ^oF$!

e) Megállapította, hogy
   - a víz mellett minden folyadéknak van forráspontja;
   - a forráspont értéke a külső nyomástól függ.

Ő volt az első a világon, aki a vizet fagyáspontjánál alacsonyabb hőmérsékletre tudta lehűteni. (Túlhűtés jelensége!)

4.6. feladat

Átmenetileg olyan iszapot nyomunk a csőbe, amelynek sűrűsége általában

$$3\,000\ \frac{kg}{m^3}$$

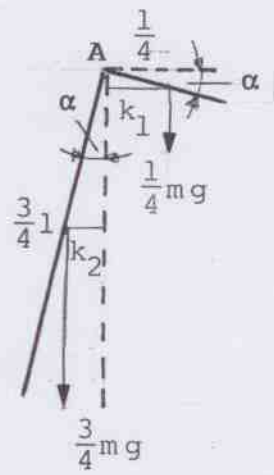
körüli érték.

4.7.A) feladat

$l_1 = 3\frac{l}{4}$ $\quad l_2 = \frac{l}{4}$ $\quad A$ = állandó $\quad \rho$ = állandó $\quad \alpha = ? = 6{,}34^\circ$

Már sokszor tapasztalhattuk, hogy az ilyen tulajdonságú testek tömege, és ezzel a rájuk ható nehézségi erő egyenesen arányos a hosszúsággal:

$$m\,g \sim l\ .$$



Támasszuk alá az alakzatot az **A** pontnál. Egyensúlyban a testre ható erők forgatónyomatékainak előjeles összege nulla:

$$\Sigma M = 0\ .$$

Az **A** pontra:

$$M_1 - M_2 = 0 \longrightarrow m_1 g\, k_1 = m_2 g\, k_2$$

$$\rho\, 3\frac{l}{4} A\, g\, k_1 = \rho \frac{l}{4} A\, g\, k_2 \longrightarrow 3\, k_1 = k_2\ .$$

Az α szöggel kapcsolatos összefüggések az ábra alapján:

$$\sin\alpha = \frac{k_1}{\frac{3\,l}{8}} \qquad \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{k_2}{\frac{l}{8}}. \qquad \text{Ezekkel}$$

$$k_1 = \frac{3\,l}{8}\sin\alpha \qquad k_2 = \frac{l}{8}\sin(90^\circ - \alpha) \qquad 9\sin\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)\ .$$

Mivel $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin 90^\circ . \cos\alpha - \cos 90^\circ . \sin\alpha = \cos\alpha$, ezért

$$9.\sin\alpha = \cos\alpha \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{9} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{9}$$

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\frac{1}{9} = 6{,}340^\circ\ .$$

Tehát az alakzat 6,34 fokkal fordul el.

4.7.B) feladat

1 - alumínium $\qquad$ 2 - víz

$m_1 = 1$ kg $\quad t_1 = 80\ ^\circ C$ $\quad m_2 = 4$ kg $\quad t_2 = 20\ ^\circ C$ $\quad \rho_1 = 2698\ \frac{kg}{m^3}$

$c_1 = 9.10^2\ \frac{J}{kg.K}$ $\quad c_2 = 4{,}183\ \frac{kJ}{kg.K} = 4{,}183.10^3\ \frac{J}{kg.K}$ $\quad \alpha_1 = 2{,}39.10^{-5}\ \frac{1}{K}$

$\Delta V = ? = -1{,}513\ cm^3$

A V térfogatváltozás a hőelvonás (negatív előjelű hőközlés) hatására következik be. Emiatt kiszámítható a

$$\Delta V = \beta . V_1 . \Delta t$$

összefüggés segítségével. A β térfogati hőtágulási együttható megadható 3α alakban, a V_1 kezdeti térfogat pedig

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} .$$

A Δt hőmérséklet-változás $t - t_1$, ha t-vel a termikus egyensúlyra jellemző hőmérsékletet jelöljük. Ez az egyensúly úgy alakul ki, hogy hőveszteség nélküli esetben az alumínium lead

$$Q_1 = c_1 m_1 (t - t_1),$$

a víz pedig felvesz

$$Q_2 = c_2 m_2 (t - t_2)$$

hőmennyiséget. A két hőmennyiség összege viszont nulla:

$$Q_1 + Q_2 = 0 .$$

Behelyettesítéssel a

$$c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (t - t_2) = 0 \longrightarrow -c_1 m_1 (t_1 - t) + c_2 m_2 (t_2 - t) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t_2 - t)$$

összefüggéseket írhatjuk fel. Az utóbbiból megkapjuk a keresett hőmérsékletet:

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} .$$

Ezzel

$$\Delta V = 3\alpha \cdot \frac{m_1}{\rho_1} \left(\frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} - t_1 \right) .$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$\Delta V = 3.2{,}39.10^{-5} \frac{1}{^{o}C} \cdot \frac{1\ kg}{2{,}698.10^{3}\ \frac{kg}{m^3}} (t - t_1) = 2{,}658.10^{-8}\ \frac{m^3}{^{o}C} (t - t_1)$$

$$t - t_1 = \frac{9.10^{2}\ \frac{J}{kg.^{o}C} \cdot 1\ kg \cdot 80\ ^{o}C + 4{,}183.10^{3}\ \frac{J}{kg.^{o}C} \cdot 4\ kg \cdot 20\ ^{o}C}{9.10^{2}\ \frac{J}{kg.^{o}C} \cdot 1\ kg + 4{,}183.10^{3}\ \frac{J}{kg.^{o}C} \cdot 4\ kg} - 80\ ^{o}C = -56{,}94\ ^{o}C$$

$$\Delta V = 2{,}658.10^{-8}\ \frac{m^3}{^{o}C} (-56{,}94\ ^{o}C) = -1{,}513.10^{-6}\ m^3 .$$

Tehát a fém térfogata 1,513 cm^3-rel csökken.

Megjegyzés! 1. Vegyük észre, hogy a megadott $\frac{1}{K}$ és $\frac{J}{kg.K}$ mértékegység helyett $\frac{1}{^{o}C}$ és $\frac{J}{kg.^{o}C}$ mértékegységgel számolhattunk!

2. A ΔV kiszámítására kapott összefüggés „borzalmas" lett a behelyettesített mennyiségek eredményeként. Lényesen „könnyebb" a megoldás, ha részeredményeket (β, V_1 és t) előbb kiszámolunk.

Ez azonban azt is eredményezheti, hogy a különféle módon végrehajtott egyszerűsítésekkel kapott végeredmény jelentősen eltérhet az általunk megadott értéktől.

4.8.A) feladat

$l = 1\ m \qquad \alpha = 30^o$

a) $t' = \frac{t}{2}$ $\qquad$ $s = ? = 0{,}25\ m$

Az m tömegű test mozgását a nehézségi erő $m g.\sin\alpha$ nagyságú lejtőirányú komponense biztositja. Newton

$$\Sigma F = m a$$

alakú IV. törvénye miatt

$$m g.\sin\alpha = m a \longrightarrow a = g.\sin\alpha \; .$$

Az l út megtételéhez szükséges t idő az $l = \frac{a}{2}t^2$ összefüggésből:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g.\sin\alpha}} \; .$$

A keresett út kiszámítható az

$$s = \frac{g.\sin\alpha}{2}.(t')^2 = \frac{g.\sin\alpha}{2}.\frac{t^2}{4} = \frac{g.\sin\alpha}{8}t^2$$

összefüggés segítségével:

$$s = \frac{g.\sin\alpha}{8}.\frac{2l}{g.\sin\alpha} = \frac{l}{4}$$

l ismert értékével:

$$s = \frac{1\ m}{4} = 0{,}25\ m \; .$$

Tehát az adott idő alatt a test 25 cm utat tesz meg.

b) $v = ? = 0{,}7906\ \frac{m}{s}$

A test sebessége:

$$v = a t' = (g.\sin\alpha).\frac{t}{2} = \frac{g.\sin\alpha}{2}\sqrt{\frac{2l}{g.\sin\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{g.\sin\alpha}{2}l} \; .$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{\frac{10\ \frac{m}{s^2}\sin 30^o}{2}\cdot 0{,}25\ m} = 0{,}7906\ \frac{m}{s} \; .$$

Tehát a test sebessége $79{,}06\ \frac{cm}{s}$.

4.8.B) feladat

$U_o = 24\ V \qquad R_b = 2\ \Omega \qquad R = 10\ \Omega$

a) $(\Delta I)' = ? = -0{,}9091\ A$

Az áramkörben folyó áram erőssége kiinduláskor:

$$I = \frac{U_o}{R + R_b} \; .$$

Ha R'-vel jelöljük az áramkör eredő ellenállását, akkor soros kapcsolás esetében az

$$R' = 2R + R_b$$

miatt

$$I' = \frac{U_o}{R_b + 2R} .$$

Az áramerősség változása:

$$(\Delta I)' = I' - I = \frac{U_o}{R_b + 2R} - \frac{U_o}{R_b + R} .$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$(\Delta I)' = \frac{24\ V}{2\ \frac{V}{A} + 2.10\ \frac{V}{A}} - \frac{24\ V}{2\ \frac{V}{A} + 10\ \frac{V}{A}} = -0{,}9091\ A .$$

Tehát az áramerősség 0,9091 amper-rel csökken.

b) $(\Delta I)'' = ? = 1{,}429\ A$

Ebben az esetben az új áramerősség értéke:

$$I'' = \frac{U_o}{R_b + R \times R} = \frac{U_o}{R_b + \frac{R}{2}} = \frac{2U_o}{2R_b + R} .$$

Az áramerősség változása:

$$(\Delta I)'' = I'' - I = \frac{2U_o}{2R_b + R} - \frac{U_o}{R_b + R} = \left(\frac{2}{2R_b + R} - \frac{1}{R_b + R}\right) U_o .$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$(\Delta I)'' = \frac{2}{2.2\ \frac{V}{A} + 10\ \frac{V}{A}} - \frac{1}{2\ \frac{V}{A} + 10\ \frac{V}{A}}).24\ V = 1{,}429\ A .$$

Ebben az esetben az áramerősség 1,429 amper-rel növekszik.

4.9.A) feladat

$l_A = 20\ cm = 0{,}2\ m$ $\quad D_A = 75\ \frac{N}{m}$ $\quad l_B = 30\ cm = 0{,}3\ m$ $\quad D_B = 50\ \frac{N}{m}$

$l = 60\ cm = 0{,}6\ m$ $\quad l_A + \Delta l_A = ? = 24\ cm$

Kiindulási állapotban $l_A + l_B$, megnyújtott állapotban

$$l = l_A + l_B + \Delta l_A + \Delta l_B$$

a két rugó együttes hossza.

A rugókra akasztott teher **mg** nagyságú **nehézségi erő**-vel (súllyal) nyújtja meg mindkét rugót:

$$mg = D_A.\Delta l_A \quad \text{és} \quad mg = D_B.\Delta l_B .$$

A két összefüggés arányából

$$1 = \frac{D_A.\Delta l_A}{D_B.\Delta l_B} \longrightarrow \Delta l_B = \frac{D_A}{D_B}.\Delta l_A$$

következik. Ezzel

$$l = l_A + l_B + \Delta l_A + \frac{D_A}{D_B}.\Delta l_A = l_A + l_B + (1 + \frac{D_A}{D_B})\Delta l_A \longrightarrow \Delta l_A = \frac{l - l_A - l_B}{1 + \frac{D_A}{D_B}} .$$

A keresett rugóhossz:

$$l_A + \Delta l_A = l_A + \frac{l - l_A - l_B}{D_A + D_B} D_B = \frac{l_A D_A + l_A D_B + l D_B - l_A D_B - l_B D_B}{D_A + D_B} =$$

$$= \frac{l_A D_A + (l - l_B) D_B}{D_A + D_B} .$$

A megadott mennyiségekkel:

$$l_A + \Delta l_A = \frac{0{,}2\ \text{m} . 75\ \frac{\text{N}}{\text{m}} + (0{,}6\ \text{m} - 0{,}3\ \text{m}) \cdot 50\ \frac{\text{N}}{\text{m}}}{75\ \frac{\text{N}}{\text{m}} + 50\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}24\ \text{m} .$$

Tehát az **A** rugó hossza 24 cm lesz.

4.9.B) feladat

A szerző megoldását az alábbiakban adjuk meg.

A leesést követően, amikor hátranéztem 0,5 s alatt a motor állandó sebességgel haladva 5 méter utat tett meg. A csomag 10 m/s kezdősebességű egyenletesen lassuló mozgást végzett. A lassulását a csúszó súrlódási erő okozta, melynek értéke $a = \mu g = 2\ \text{m/s}^2$. A csomag által megtett út $s = v_o \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 10 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 4{,}75$ m. A csomag sebessége ekkor $v = v_o - a \cdot t = 10 - 2 \cdot 0{,}5 = 9$ m/s volt.

A hátranézés pillanatában a csomag 0,25 m távolságra volt a motortól és 9 m/s sebességgel jött utánam.

A csomag sebessége a leeséstől számítottan $t = v_o/a = 10/2 = 5$ s alatt csökkent nullára.
Az általa megtett út $s = v_o/2 \cdot t = 25$ m.

A motor állandó sebességgel 1 s-ig mozogott, s a megtett út 10 m volt, majd 3 s alatt csökkent a sebessége nullára, s ez alatt $s = v_o/2 \cdot t = 15$ m utat tett meg.

Tehát a csomag is 25 métert, és a motor is 25 métert tett meg.

A meglepetés oka az volt, hogy amikor hátra néztem jött utánam a csomag, Amikor pedig megálltam ott volt közvetlen mögöttem.

4.10.A) feladat

$T_1 = 300$ K

A p - V-diagramról a következő adatokat olvashatjuk le:

$p_1 = p_2 = 100\ \text{kPa} = 1.10^5\ \text{Pa}$ $\qquad p_3 = 200\ \text{kPa} = 2.10^5\ \text{Pa}$ $\qquad \frac{Q'_{1,3}}{Q_{1,2,3}} = ? > 1$

$V_1 = 20\ \text{dm}^3 = 2.10^{-2}\ \text{m}^3$ $\qquad V_2 = V_3 = 50\ \text{dm}^3 = 5.10^{-2}\ \text{m}^3$

Azt tudjuk, hogy a héliumgáz részecskéi atomok, ezért $f = 3$.

Az állapotváltozásokat jellemző mennyiségek jeleinek indexeinél egyszerűsítést fogunk alkalmazni. Így például a $Q_{2. \rightarrow 3.}$ jelölés helyett $Q_{2,3}$ alakot, a $(\Delta U)_{1. \rightarrow 2.}$ jelölés helyett $(\Delta U)_{1,2}$ alakot stb. adunk meg.

Az állapotváltozás két részfolyamat végbemenetelével valósul meg:

- az 1. $\longrightarrow$ 2. állapotváltozás izobár folyamat és
- a 2. $\longrightarrow$ állapotváltozás izochor (izoszter) folyamat.

Az izobár folyamatra érvényes Gay-Lussac I. törvénye, amelynek alapján

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \longrightarrow T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 \longrightarrow T_2 = \frac{5.10^{-2}\ m^3}{2.10^{-2}\ m^3} T_1 = 2{,}5\, T_1 .$$

Az izochor folyamatra pedig Gay-Lussac II. törvénye alkalmazható:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2} \longrightarrow T_3 = \frac{p_3}{p_2} T_2 = \frac{p_3}{p_2} \cdot 2{,}5\, T_1 \longrightarrow T_3 = \frac{2.10^5\ Pa}{1.10^5\ Pa} \cdot 2{,}5\, T_1 = 5\, T_1 .$$

Izobár folyamatban

$$Q_{1,2} = W_{1,2} + (\Delta U)_{1,2} = p_1(V_2 - V_1) + \frac{f}{2} n R (T_2 - T_1)$$

hőmennyiséget vesz fel a gáz. Az ideális gázokra felírható állapotegyenlet segítségével

$$n R T_2 - n R T_1 = p_2 V_2 - p_1 V_1 = p_1(V_2 - V_1) \qquad (p_2 = p_1\ !)$$

írható fel. Ezzel

$$Q_{1,2} = p_1(V_2 - V_1) + \frac{f}{2} p_1 (V_2 - V_1) = \frac{3}{4}(f + 2)\, p_1 V_1 . \quad (V_2 = \frac{5}{2} V_1\ !)$$

Izochor állapotváltozásban

$$Q_{2,3} = \frac{f}{2} n R (T_3 - T_2) = \frac{f}{2} n R (5\, T_1 - \frac{5}{2} T_1) = \frac{5}{4} f\, p_1 V_1$$

hőmennyiség felvételére kerül sor.

A két állapotváltozás során a környezetből felvett hőmennyiségek összege:

$$Q_{1,3} = \frac{3}{4}(f + 2)\, p_1 V_1 + \frac{5}{4} f\, p_1 V_1 = \frac{15}{2} p_1 V_1 \qquad (f = 3\ !)$$

A „közvetlen" állapotváltozás közben felvett hőmennyiség a környezeten végzett térfogati munkára és a belső energia növelésére fordítódik:

$$Q'_{1,3} = W_{1,3} + (\Delta U)_{1,3} .$$

A térfogati munka számértéke a p - V-diagram függvénygörbéje alatti terület számértékével egyezik meg:

$$W_{1,3} = \frac{p_1 + p_3}{2} (V_3 - V_1) = \frac{3}{2} n R . 4\, T_1 = 6\, p_1 V_1 .$$

A belső energia növekedése:

$$(\Delta U)_{1,3} = \frac{f}{2} n R (T_3 - T_1) = \frac{3}{2} n R . 4 T_1 = 6\, p_1 V_1 .$$

A felvett hőmennyiség ezek segítségével:

$$Q'_{1,3} = \frac{9}{4} p_1 V_1 + 6\, p_1 V_1 = \frac{33}{4} p_1 V_1 .$$

Megállapítható, hogy

$$\frac{33}{4} p_1 V_1 > \frac{15}{2} p_1 V_1 ,$$

azaz a „közvetlen" állapotváltozás megvalósításához nagyobb hőmennyiségre van szükség.

b) $\Delta Q = ? = 1{,}5\ \text{kJ}$

A kétféle módon megvalósított állapotváltozásban a környezetből felvett hőmennyiségek különbsége:

$$\Delta Q = Q'_{1,3} - Q_{1,3} = \frac{33}{4}p_1V_1 - \frac{15}{2}p_1V_1 = \frac{3}{4}p_1V_1\ .$$

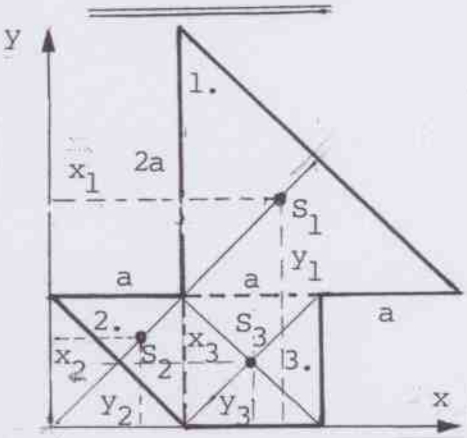
Az ismert mennyiségekkel:

$$\Delta Q = \frac{3}{4}\cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\ \text{m}^3 = 1{,}5.10^3\ \text{N.m (J)}\ .$$

Tehát a hőmennyiségek különbsége 1,5 kJ.

4.10.B) feladat

$a = 4\ \text{cm} = 4.10^{-2}\ \text{m}$ $x = ? \approx 6{,}0\ \text{cm}$ $y = ? \approx 4{,}8\ \text{cm}$



Bármelyik - a megelőző versenyszakaszokban elég sokszor elemzett - módszer alkalmas az alakzat tömegközéppontja helyének kiszámítására. Ahhoz azonban meg kell adni az „ésszerű"-nek nevezhető feldarabolással kapott rész-síkidomok területét és tömegközéppontját.

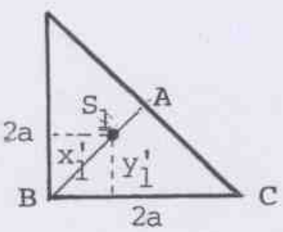
Esetünkben az „ésszerű" feldarabolás a mellékelt ábrán figyelhető meg.

A szabályos síkidomok területei:

$$A_1 = \frac{2a.2a}{2} = 2a^2 \qquad A_2 = \frac{a.a}{2} = \frac{a^2}{2} \qquad A_3 = a^2.$$

A rész-síkidomok tömegközéppontjainak koordinátáit az 1. és 2. síkidom esetében külön vizsgáljuk.

1. síkidom



$$(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = 4a^2 \qquad \overline{AB} = \overline{AC}$$

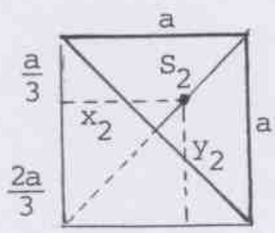
$$2(\overline{AB})^2 = 4a^2 \longrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2}\,a$$

$$\overline{BS_1} = \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,a$$

$$x_1' = y_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BS_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}a$$

2. síkidom

$$x_2 = y_2 = \frac{2}{3}a$$



A 3. síkidom esetében: $x_3 = \frac{3}{2}a \qquad y_3 = \frac{1}{2}a$

Az eredeti síkidom tömegközéppontjának koordinátáit a „kaptafa"-módszer segítségével számítjuk ki:

$$x = \frac{x_1A_1 + \dots + x_nA_n}{A_1 \dots + A_n} \qquad y = \frac{y_1A_1 + \dots + y_nA_n}{A_1 \dots + A_n}\ .$$