Előzetes

a Verseny 30. döntőjének egyik feladatához

A 30. éves Hatvani István Fizikaverseny megszámlálhatatlanul sok feladatára beküldött megoldások között néhány esetben találkoztunk az

$$s = 20\ \text{cm}.\frac{1}{100} = 0{,}2\ \text{m}$$

formájú mértékegység-átváltással. Ezeket - hibás állításuk ellenére - elfogadtuk. Arra gondoltunk ugyanis, hogy a megoldó ismeri az átváltáshoz szükséges váltószámot, csak annak jelölésében tévedett. Nem vette ugyanis figyelembe, hogy a jó számérték-egyenlet mellett hibás a mértékegység-egyenlet:

$$20.\frac{1}{100} = 0{,}2 \qquad \text{és} \qquad \text{cm} \neq \text{m}\ .$$

Az előbbihez hasonló tévedések elkerülése érdekében foglalkozunk a következőkben a mértékegységek átváltásainak esetleges gondjaival.

Feladatmegoldásaink során nagyon sokszor kerülünk abba a helyzetbe, hogy a megadott fizikai mennyiségek különféle módon megadott mértékegységeit SI-mértékegységekbe kell átváltani. Ilyen esetekben mértékegységgel rendelkező váltószám-okat alkalmazunk. A bevezetőben említett példa esetében a következőképpen járunk el:

$$s = 20\ \text{cm} = 20\ \text{cm}.\frac{1}{100\ \frac{\text{cm}}{\text{m}}} = 0{,}2\ \text{m}\ .$$

Fordított átváltás esetén:

$$s = 0{,}2\ \text{m} = 0{,}2.100\ \frac{\text{cm}}{\text{m}} = 20\ \text{cm}\ .$$

Vagyis a cm és a méter átváltását biztosító váltószámmal ($100\ \frac{\text{cm}}{\text{m}}$) egyik esetben osztani, a másik esetben szorozni kellett. Nem jelenthet gondot a matematikai művelet, ha a váltószám „lényeg"-ét („1 méterben 100 cm van", „méterenként 100 cm-rel kell számolni", stb. formájú meghatározását) ismerjük. Úgy is gondolkodhatunk, hogy a többszöröst kifejező mértékegységhez kisebb számérték tartozik, illetve ... . Ekkor a számértéket szorozni kell a váltószámmal, illetve ... . Másképpen: ahányszoros a mértékegység, annyiad részére csökken a számérték, illetve ... . Például egy adott tömegértéknél:

$$100\ \text{g} = 100\ \text{g}.\frac{1}{1000\ \frac{\text{g}}{\text{kg}}} = 0{,}1\ \text{kg} \qquad (\text{kg} \underset{1000}{>} \text{g} \qquad 0{,}1 \underset{1000}{<} 100)$$

Az előbbieket jól alkalmazhatjuk az alapmértékegységek (méter, kg, másodperc törtrészei és mól) esetében, valamint azon származtatott fizikai mennyiségek mértékegységei átváltásainál, amelyek önálló nevűek (például newton, pascal, joule, watt stb., és az alapmennyiségek közé tartozó elektromos áramerősség mértékegysége, az amper). A váltószámok nagyságai minden esetben

$$10^x$$

alakban adhatók meg. x értéke az alap és a prefixált (előtaggal ellátott) mértékegységek átváltásakor az elég ritkán szereplő centi, deci, deka és hekto prefixumokkal ellátott mértékegységek esetében 1 vagy 2, a többséget képviselő további prefixumok esetében 3-mal osztható egész szám lehet. (x maximális értéke mai ismereteink szerint 48!) Példaként néhány váltószám:

$1.10^2\,\frac{hPa}{kPa}$ $\quad 1.10^5\,\frac{cg}{kg}$ $\quad 1.10^4\,\frac{dm}{km}$ $\quad 1.10^6\,\frac{mA}{kA}$ $\quad 1.10^6\,\frac{\mu s}{s}$.

Ezeknél egy fizikai mennyiség prefixált mértékegységei közötti átváltások váltószámairól van szó.

Természetesen egy adott váltószám reciprok értéke is váltószám! Például:

$$1.10^3\,\frac{m}{km} \quad \text{és} \quad 1.10^{-3}\,\frac{km}{m}.$$

Ezek mindegyike alkalmazható mértékegységek átváltása során. Egy konkrét (tényleges) eset:

$d = 2500\ m = ?\ km$

$$d = \frac{2{,}5.10^3\ m}{1.10^3\,\frac{m}{km}} = 2{,}5\ km \qquad d = 2{,}5.10^3\ m.1.10^{-3}\,\frac{km}{m} = 2{,}5\ km\ .$$

Vagyis az egyik esetben osztani, a másik esetben szorozni kellett a váltószámmal. Ugyanezt tehetjük a következő feladatnál:

$d = 30\ km = ?\ m$

$$d = \frac{30\ km}{1.10^{-3}\,\frac{km}{m}} = 3.10^4\ m \qquad d = 30\ km.1.10^3\,\frac{m}{km} = 3.10^4\ .$$

Jogosnak látszik a kérdés: Mikor kell osztani, és mikor szorozni a váltószámmal? Nagyon egyszerű „szabály" megfogalmazásával választ adhatunk a kérdésre. A lehetőségeket azonban teljesen felesleges lenne memorizálni! Ehelyett a saját eljárásomat ajánlom.

> 1-nél nagyobb számértékű váltószámmal mindig szorozni kell, ha a többszöröst jelentő mértékegységhez tartozó (kisebb számértékű) mennyiségről a törtrészt megadó mértékegységű (nagyobb számértékű) mennyiségre akarunk áttérni. Ellenkező esetben a váltószámmal osztani kell.

Példa:

$m = 3.10^{-2}\ kg = ?\ g$

$m = 3.10^{-2}\ kg.1.10^3\,\frac{g}{kg} = 30\ g$

$kg > g \qquad 3.10^{-2} < 30$

$m = 30\ g = ?\ kg$

$m = \frac{30\ g}{1.10^3\,\frac{g}{kg}} = 3.10^{-2}\ kg$

$g < kg \qquad 30 > 3.10^{-2}$

Mindkét esetben az 1-nél nagyobb számértékű váltószámmal számoltam!

Az első (még kis) nehézség akkor áll elő, ha a másodperc többszörösével akarunk számolni. Ebben az esetben ugyanis a váltószám nagysága nem adható meg az említett 10^x formulával. Most

$60\,\frac{s}{min}$ $\quad 3{,}6.10^3\,\frac{s}{h}$ $\quad 60\,\frac{min}{h}$ $\quad 1{,}44.10^3\,\frac{min}{d}$ $\quad 8{,}64.10^4\,\frac{s}{d}$ $\quad 365{,}25\,\frac{d}{y}$

váltószámok fordulnak elő.

További gondok akkor adódnak, ha a származtatott fizikai mennyiségek mértékegységeit akarjuk átváltani. Először olyan mennyiségeket választunk, amelyek alapmennyiségek hatványozásával, reciprok értékével vagy maximum két alapmennyiség kombinációjával állíthatók elő. A teljesség igénye nélkül csak néhány váltószámot sorolunk fel.

- **Terület** (A): $1.10^4\,\frac{cm^2}{m^2}$ $\quad 1.10^6\,\frac{mm^2}{m^2}$ $\quad 100\,\frac{dm^2}{m^2}$ $\quad 1.10^{12}\,\frac{\mu m^2}{m^2}$.
- **Térfogat**(V): $1.10^{12}\,\frac{\mu m^3}{cm^3}$ $\quad 1.10^6\,\frac{cm^3}{m^3}$ $\quad 1.10^9\,\frac{mm^3}{m^3}$

- **Fordulatszám** (n):

$$60\,\frac{\frac{1}{\text{min}}}{\frac{1}{\text{s}}} = 60\,\frac{\text{s}}{\text{min}}$$

A váltószám első alakja „helyigényes", a második első látásra nehezen hihető!

Például: $n = 2\,\frac{1}{\text{s}} = ?\,\frac{1}{\text{min}}$

$$n = 2\,\frac{1}{\text{s}}.60\,\frac{\text{s}}{\text{min}} = 120\,\frac{1}{\text{min}} \qquad \frac{1}{\text{min}} < \frac{1}{\text{s}}\ !$$

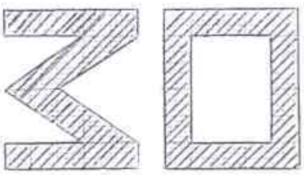
- **Sebesség** (v): $v = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = ?\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{4\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{\dfrac{4\ \text{m}}{1000\,\frac{\text{m}}{\text{km}}}}{\frac{1}{3600}\,\text{h}} = \frac{4.3600}{1000}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 14{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A váltószám: $\dfrac{14{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3{,}6\,\dfrac{\frac{\text{km}}{\text{h}}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3{,}6\,\dfrac{\text{s.km}}{\text{h.m}}$. Helyigényes, vagy bonyolultsága miatt „ijesztő"!

(A $\frac{4\ \text{m}}{1\ \text{s}}$-ben való jelölés feleslegesnek tűnik. Viszont „oldja" a megoldás „tömörség"-ét!)

- **Gyorsulás** (a): $a = 0{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = ?\,\frac{\text{cm}}{\text{min}^2}$



$$0{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{0{,}3\ \text{m}}{(1\ \text{s})^2} = \frac{0{,}3\ \text{m}.100\,\frac{\text{cm}}{\text{m}}}{(\frac{1}{60}\ \text{min})^2} = \frac{30\ \text{cm}}{\frac{1}{3600}\text{min}^2} = 1{,}08.10^5\,\frac{\text{cm}}{\text{min}^2}.$$

Mivel $\frac{\text{m}}{\text{s}^2} > \frac{\text{cm}}{\text{min}^2}$, ezért a váltószám:

$$\frac{1{,}08.10^5\,\frac{\text{cm}}{\text{min}^2}}{0{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}6.10^5\,\frac{\text{s}^2.\text{cm}}{\text{min}^2.\text{m}}.$$ Segítségével:

$$a = 0{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.3{,}6.10^5\,\frac{\text{s}^2.\text{cm}}{\text{min}^2.\text{m}} = 1{,}08.10^5\,\frac{\text{cm}}{\text{min}^2}.$$

- **Sűrűség** (ρ):

$$\rho = 2{,}7.10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = ?\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$2{,}7.10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{2{,}7.10^3\ \text{kg}}{(1\ \text{m})^3} = \frac{2{,}7.10^3\ \text{kg}.10^3\,\frac{\text{g}}{\text{kg}}}{(100\ \text{cm})^3} = 2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Mivel $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} > \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, ezért a váltószám:

$$\frac{2{,}7\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{2{,}7.10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1.10^{-3}\,\frac{\text{g.m}^3}{\text{kg.cm}^3}.$$

Segítségével:

$$\rho = 2{,}7.10^3\ \frac{kg}{m^3}.10^{-3}\ \frac{g.m^3}{kg.cm^3} = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}\ .$$

(Láthatóan az előzőleg megfogalmazott „szabály"-omtól eltértem: 1-nél kisebb számértékű váltószámot használtam fel a megoldás során.)

A vázolt néhány példán megfigyelhetjük: még egyszerűbb származtatott fizikai mennyiségek esetében sem könnyű kiszámítani a váltószám nagyságát és megadni az esetenként eléggé bonyolultnak látszó mértékegységét!

Az előbbiekben megadott váltószámok természetesen még bonyolultabbak olyan fizikai mennyiségek esetében, amelyek 3, vagy még több alapmennyiséggel hozhatók kapcsolatba. Ezeknél már szívesen felhasználjuk az önálló nevű mértékegységeket. Példaként néhány átváltást elvégzünk.

- **Erő** (F): $F = 30\ N = ?\ \frac{g.cm}{min^2}$

$$1\ N = 1\ \frac{kg.m}{s^2} = \frac{1\ kg.1\ m}{(1\ s)^2} = \frac{1.10^3\ g.100\ cm}{(\frac{1}{60}\ min)^2} = \frac{1.10^5.60^2\ g.cm}{1\ min^2} =$$

$$= 3{,}6.10^8\ \frac{g.cm}{min^2} \longrightarrow N > \frac{g.cm}{min^2}\ .$$

A váltószám:

$$\frac{3{,}6.10^8\ \frac{g.cm}{min^2}}{1\ N} = 3{,}6.10^8\ \frac{g.cm}{min^2.N}\ .$$

A keresett erő-érték:

$$F = 30\ N.3{,}6.10^8\ \frac{g.cm}{min^2.N} = 1{,}08.10^{10}\ \frac{g.cm}{min^2}\ .$$

- **Nyomás** (p): $p = 500\ kPa = ?\ \frac{N}{cm^2}$

$$500\ kPa = 5.10^5\ Pa = 5.10^5\ \frac{N}{m^2} = \frac{5.10^5\ N}{(1\ m)^2} = \frac{5.10^5\ N}{(100\ cm)^2} =$$

$$= 50\ \frac{N}{cm^2} \longrightarrow kPa < \frac{N}{cm^2}$$

A váltószám:

$$\frac{500\ kPa}{50\ \frac{N}{cm^2}} = 10\ \frac{kPa.cm^2}{N}.$$

A keresett nyomás-érték:

$$p = \frac{500\ kPa}{10\ \frac{kPa.cm^2}{N}} = 50\ \frac{N}{cm^2}\ .$$

30

- **Teljesítmény** (P):

$$P = 30\ W = ?\ \frac{g.cm^2}{ms^3}$$

$$1\ W = 1\ \frac{J}{s} = 1\ \frac{\frac{kg.m^2}{s^2}}{s} = 1\ \frac{kg.m^2}{s^3} = \frac{1.10^3\ g.10^4\ cm^2}{(1.10^3\ ms)^3} =$$

$$= 1.10^{-2}\,\frac{g.cm^2}{ms^3} \longrightarrow W < \frac{g.cm^2}{ms^3}$$

A váltószám nagysága és mértékegysége:

$$\frac{1\ W}{1.10^{-2}\,\dfrac{g.cm^2}{ms^3}} = 100\,\frac{ms^3.W}{g.cm^2}\ .$$

Ezzel a keresett teljesítmény-érték:

$$P = \frac{30\ W}{1.10^{-2}\,\dfrac{ms^3.W}{g.cm^2}} = 0{,}3\,\frac{g.cm^2}{ms^3}\ .$$

Utoljára az egyik ismert összetett fizikai mennyiség, az elektromos kapacitás önálló nevű és az alap-mértékegységekkel megadott mértékegységét adjuk meg:

$$[C] = F = \frac{s^4A^2}{m^2.kg}\ .$$

El sem lehet képzelni, hogy hányféle átváltást tesz lehetővé a megadott farad mértékegység!

Végezetül szeretnénk megjegyezni, hogy az említett elég sok fizikai mennyiség között egy, a hőmérséklet még véletlenül sem fordult elő. Szándékosan mellőztük, mivel a Verseny során nagyon sokszor szerepeltettük már! Még egyszer azonban - a döntő feladatai megoldásának ismertetésekor - visszatérünk a sajátos, az előbbiekben vázolt témakört még jobban bonyolító szerepére.

A döntő feladatainak megoldásakor az előbbiek „szellem"-ében fogjuk a megadott mennyiségek mértékegységeit átváltani.

Debrecen, 2013. március 5.

Csopcsa József